

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**

**ADOLF HAIMOVICI**

Etapă locală-9 februarie 2013

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Barem clasa XI

**1. Fie  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât  $X+Y=XY$ , pentru orice  $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ .**

**Să se arate că  $2(A+B+C+D)=ABCD$ .**

**Soluție:**  $XY=X+Y=Y+X=YX$  deci matricele  $A, B, C, D$  comută între ele.....2p

$A+B=AB, B+C=BC, C+D=CD, D+A=DA$ .....1p

Prin adunare  $2(A+B+C+D)=AB+BC+CD+DA$ .....1p

$=AB+BC+DC+DA=B(A+C)+D(A+C)=(B+D)(A+C)$ .....2p

$=(BD)(AC)=ABCD$ .....1p

**2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ , transpusa sa  $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ , matricea  $B = A \cdot A^t$  și punctele  $P_k(a_k, b_k)$ , unde  $k \in \{1, 2, 3\}$ .**

**a) Să se calculeze  $B$  în cazul  $P_1(1, 2), P_2(3, 4), P_3(-3, -6)$ .**

**b) Să se arate că  $\det B \geq 0$ , oricare ar fi punctele  $P_1, P_2, P_3$ .**

**c) Să se arate că, dacă  $\det B=0$  atunci punctele  $P_1, P_2, P_3$  se găsesc pe o dreaptă ce trece prin originea axelor de coordonate.**

**Soluție:**

$$a) B = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 32 \\ 32 & 56 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} \dots\dots 1p$$

$$\det B = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \geq 0 \text{ din inegalitatea CBS sau } \det B = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \geq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \det B = 0 \Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow P_1(kb_1, b_1), P_2(kb_2, b_2), P_3(kb_3, b_3) \text{ deci } P_1, P_2, P_3 \text{ coliniare} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Iar ecuația dreptei este } x-yk=0, \text{ adică o dreaptă ce trece prin origine} \dots\dots\dots 1p$$

**3. Să se calculeze următoarele limite:**

**a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$**

**b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$**

**Soluție:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2^x + 3^x - 2}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2^x + 3^x - 2}{2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2^x - 1 + 3^x - 1}{2} \cdot \frac{1}{x}} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln 2 + \ln 3}{2}} = \sqrt{6} \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - 1) - (\sqrt[3]{\cos x} - 1)}{\sin^2 x} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1)} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos^2 x)(\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos^2 x)(\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1)} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(1 + \cos x)(\sqrt{\cos x} + 1)} - \frac{-1}{(1 + \cos x)(\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1)} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} \dots\dots\dots 1\text{p}
\end{aligned}$$

4. Să se determine a,b,c numere reale astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} - \{-c\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$  să aibă ca asimptote drepte de ecuații  $x=1$  și  $y=x+2$  iar  
punctul  $P(2,6)$  să fie un punct al graficului.

**Soluție:** din  $x = 1$  asimptotă verticală se obține  $c = -1$ .....1p

Din  $y=x+2$  asimptotă oblică  $m=1$ ,  $n=2$ .....1p

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x} = 1 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x(a+1) + b}{x - 1} \right) = a + 1 \dots\dots\dots 2\text{p}$$

deci  $a=1$  și  $b \in \mathbb{R}$ .....1p

$$f(2)=6 \Rightarrow b = 0 \dots\dots\dots 1\text{p}$$